

## **ANÁLISE DE TRAÇÃO EM CORPOS PRISMÁTICOS ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

**Ericki Soares de Assis**

Graduando em Fabricação Mecânica  
Faculdade de Tecnologia SENAI CIC  
ericki.assis@gmail.com

**Edgar Della Giustina**

Mestre em Engenharia Mecânica,  
Docente na Faculdade de Tecnologia SENAI CIC  
edgar.giustina@pr.senai.br

### **RESUMO**

Este trabalho teve tem como objetivo principal fazer a modelagem computacional de barra unidimensional submetida à tração e análise dos resultados de alongamento. A vantagem da modelagem, é que ela auxilia na diminuição de custos operacionais e economiza tempo. Para seu desenvolvimento foi utilizado o Método de Elementos Finitos, e a modelagem do exemplo foi realizada utilizando o software CATIA. Foi analisada a convergência dos resultados refinando as malhas de Elementos Finitos que o CATIA gera. Após a convergência, os resultados foram comparados com o método analítico através de gráficos e tabelas. O resultado demonstrou proximidade, o que faz com que a modelagem seja uma alternativa para os testes, a um custo reduzido.

**Palavras-chave:** Modelagem. Tração. MEF. CATIA.

### **1 INTRODUÇÃO**

Com o avanço dos softwares de projetos mecânicos, está cada dia mais acessível projetar produtos e objetos de geometrias difíceis ou com materiais não usuais. Essa condição beneficia a indústria, que vem tendo um crescimento significativo em termos de novas tecnologias. O grande problema está em submeter estes novos produtos aos testes necessários antes de lançar o produto no mercado, já que os testes têm elevados custos, impactando na elevação do preço do projeto, podendo inviabilizando-o, em alguns casos. Para resolver esses problemas, foram desenvolvidos cálculos, estudos e criados softwares que conseguem precisar muitos tipos de testes que auxiliam o projeto de novos produtos, e uma dessas formas de cálculo é o Método dos Elementos Finitos (MEF).

É através do MEF que se obtêm a determinação dos valores de tensões e deformações de sólidos de várias geometrias, através da divisão de suas dimensões

---

em reticulados pré-estabelecidos e analisados de formas individualizadas ao longo de sua extensão.

Ele consiste em dividir o domínio do problema em regiões menores de geometrias mais simples (formato triangular, quadrilateral, cúbico, etc.). Sua eficácia consiste em encontrar os resultados mais exatos possíveis, pois a tecnologia vem avançando muito nos últimos anos, e cada detalhe interfere, por exemplo, numa produção seriada. Utilizar resultados precisos nas variáveis de um processo pode resultar em uma grande economia, tanto de tempo quanto dinheiro, dependendo da sua aplicação.

Nesse trabalho será mostrada a aplicação do Método dos Elementos Finitos via software Catia e serão apresentados resultados numéricos comparados à solução analítica. Este trabalho está estruturado em 5 partes, além da introdução. Inicia-se com uma revisão teórica sobre o Método dos Elementos Finitos, posteriormente, apresenta-se a metodologia. Na terceira parte, será apresentado um exemplo de aplicação, na sequência serão mostrados os resultados e suas discussões. Por fim, a ltima seção é referente à conclusão.

## **2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

O Método dos Elementos Finitos surgiu na área da indústria aeroespacial no começo da década de 50 como uma poderosa ferramenta numérica para a solução de problemas matemáticos da Engenharia e da Física (RICCI, 2005). Sua proposta era uma nova possibilidade para resolver problemas da teoria da elasticidade, superando as dificuldades e problemas inerentes aos métodos anteriores (ASSAN, 2003).

Na década de 60 foi percebida aplicabilidade deste método a problemas não estruturais, como de fluidos, meios porosos, termodinâmica e eletromagnetismo, e conduziu ao estabelecimento de critérios de convergência. Já nos anos 70, foi identificada uma ampliação de sua aplicabilidade e de suas vertentes de formulação como a incorporação de facilidades de geração de modelos discretos. Na década de 80, o MEF passou a ser disponibilizado em microcomputadores, o que o tornou mais acessível (SORIANO, 2009).

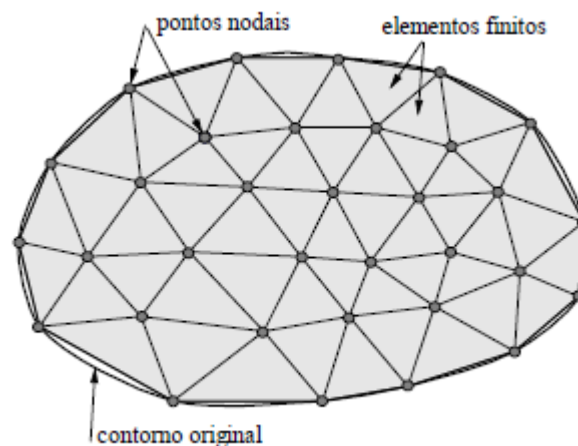
Para garantir uma boa qualidade, os processos de fabricação são também simulados por elementos finitos, no processo de conformação, por exemplo, são

simulados para garantir a fabricação no processo de laminação metálica (AZEVEDO, 2003).

Os elementos finitos utilizados na discretização (subdivisão) do domínio do problema são conectados entre si através de determinados pontos, denominados nós ou pontos nodais, conforme indica a Figura 3. Ao conjunto de elementos finitos e pontos nodais, dá-se, usualmente o nome de malha de elementos finitos. Devido ao fato das sub-regiões apresentarem dimensões finitas, estas sub-regiões são chamadas “elementos finitos”, em contraste com os elementos infinitesimais utilizados no cálculo diferencial e integral. Advém daí, o nome “Método dos Elementos Finitos”, estabelecido por Ray Clough, na década de 50 (SOUZA, 2003).

A Figura 1 mostra um elemento com uma malha triangular de Elementos Finitos, essa malha não consegue abranger todo o contorno do elemento, por isso em alguns casos é necessário dividir mais esse elemento, fazendo com que minimize o erro e o resultado seja mais preciso.

FIGURA 1 - MALHA DE ELEMENTOS FINITOS (PARA PROBLEMA PLANO)



FONTE: SOUZA, 2003

### 3 METODOLOGIA

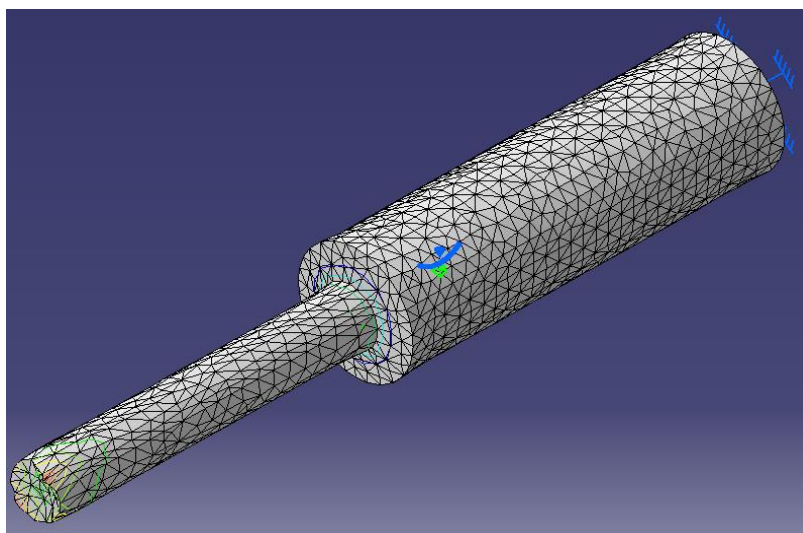
Neste trabalho foi utilizado o software CATIA V5R18 para realizar as análises dos corpos escolhidos. Através da área de Análise de Estruturas do software, podem-se definir parâmetros para estudar tensões e deslocamentos, além de outros fenômenos físicos.

---

No software CATIA, igual ocorre em outros softwares CAD/CAE, é possível simular situações reais usando métodos computacionais. Essas simulações devem ser executadas com valores reais de propriedades dos materiais, dimensões do elemento que será simulado e esforços que ele sofrerá. Com o auxílio dessas simulações, o gasto com a fabricação é reduzido por já ser usado materiais e características geométricas corretas, não sendo necessário fazer alterações no molde, promovendo um custo operacional inferior e não ter desperdício de tempo de máquina. Também pode-se testar novos designs com rapidez, apenas mudando da geometria no software, fazendo com que antes da criação de um novo produto seja possível fazer testes importantes.

Na parte de simulação numérica computacional de esforços mecânicos, o software CATIA trabalha com malha de elementos finitos, como visto na Figura 2. Essas malhas são tetraédricas e utiliza-se de funções lineares e quadráticas para modelar os elementos finitos e solucionar os problemas, dando respostas, por exemplo, de tensão mecânica, deslocamentos e deformações.

FIGURA 2 - EIXO SUBMETIDO À ANÁLISE DE TRAÇÃO. RESULTADO GRÁFICO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS.



Para realizar este trabalho, são utilizadas quatro tipos de análises: Análise Linear que modela os elementos com equação do primeiro grau, Análise Parabólica que faz a modelagem de cada elemento com equação do segundo grau, Análise Linear e Análise Parabólica com Seleção de Arestas que consiste em selecionar manualmente as arestas do sólido a ser analisado, isso é feito para que o programa refine na parte selecionada que são as arestas onde tem concentração de tensões, diminuindo a possibilidade de maiores erros e resolvendo de maneira mais rápida o problema por não precisar refinar tanto a malha.

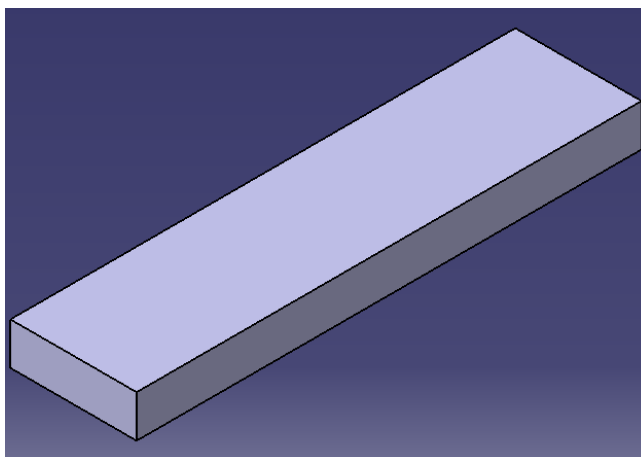
#### 4 EXEMPLO DE BARRA UNIDIMENSIONAL

O exemplo utilizado neste trabalho foi uma barra unidimensional em forma de paralelepípedo mostrada na Figura 3 e que tem as seguintes características:

- Dimensões: 120x30x10mm.
- Material: Aço (módulo de elasticidade  $E=2,1 \times 10^5 \text{Mpa}$ ).

Será considerada uma força de tração de 100 N em uma das extremidades de área menor e que a barra está fixa na extremidade paralela a que foi aplicada a força.

FIGURA 3 - BARRA DESENHADA NO CATIA



A barra da Figura 3 será submetida a quatro tipos de análises.

- Análise Linear;
- Análise Linear com Seleção de Arestas;
- Análise Parabólica;
- Análise Parabólica com Seleção de Arestas;

---

Para fazer a resolução analítica desse problema é usado a equação (MELCONIAN, 2008):

$$\Delta l = \frac{Fl}{AE}$$

Onde:

$\Delta l$  – alongamento da peça (m)

$\sigma$  – tensão normal (Pa)

A - área da secção transversal da peça (m<sup>2</sup>)

E- módulo de elasticidade do material (Pa)

$l$  – comprimento inicial da peça (m)

F – Força de tração (N)

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O método analítico para chegar ao resultado do alongamento usa as informações da barra, tais como comprimento, altura e largura, e também o seu módulo de elasticidade para chegar ao resultado de alongamento em milímetros.

Colocando todos os dados na equação, temos que para uma barra de Aço, de 120mm de comprimento, por 30mm de largura e 10mm de altura o deslocamento será de 0,000190476mm.

As tabelas e gráficos a seguir mostram a comparação entre a solução analítica e a solução obtida pelo MEF, também mostram os dados da malha e a diferença em porcentagem para o resultado analítico, além dos dados do computador.

### 5.1 ANÁLISE LINEAR

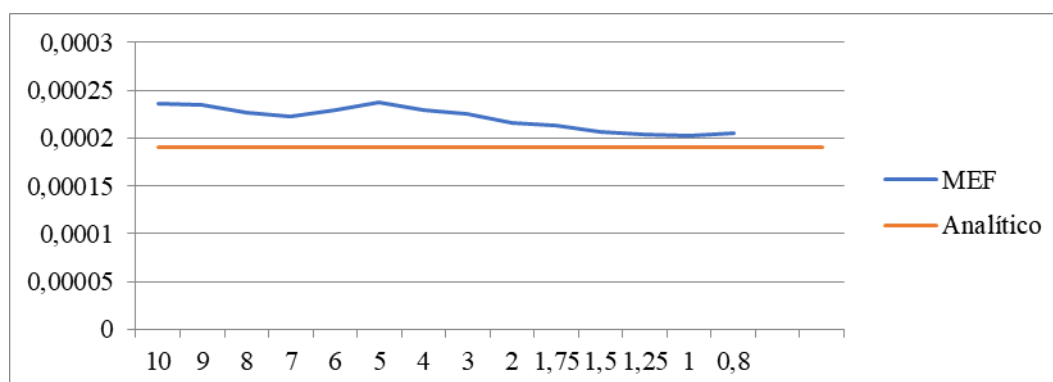
Na Tabela 1 é possível observar que a diferença entre os resultados diminui de acordo com o refinamento da malha. Isso acontece porque cada vez que a malha é refinada, ela é capaz de abranger uma área mais próxima da área real da barra em questão, trazendo o cálculo cada vez mais próximo da realidade.

TABELA 1: DIFERENÇA PERCENTUAL ENTRE O MÉTODO ANALÍTICO E O MEF.

Malha	Resultado pelo MEF	Diferença (%)	CPU (s)	MEMÓRIA (kb)	DISCO (kb)
1	0,000211	10,8	2,00E+01	1,99E+04	1,36E+05
0,9	0,000215	12,9	8,00E+01	4,39E+04	3,06E+05
0,8	0,000211	10,8	1,00E+01	1,91E+04	1,02E+05
0,7	0,00021	10,3	1,00E+02	6,07E+04	4,37E+05
0,6	0,000209	9,7	3,00E+02	9,93E+04	7,42E+05
0,5	0,000206	8,2	9,00E+02	2,04E+05	2,06E+06
0,4	0,000213	11,8	2,00E+03	2,98E+05	2,80E+06
0,3	0,000205	7,6	3,00E+03	4,95E+05	5,24E+06
0,2	0,000203	6,6	9,00E+03	1,10E+06	1,28E+07

No gráfico da Figura 4 são comparados os resultados entre os dois tipos de análise, onde o resultado analítico é constante (um valor exato), e o MEF gera resultados diversos dependendo do tamanho da malha de seus elementos.

FIGURA 4 - DIFERENÇA ENTRE OS RESULTADOS OBTIDOS NO MEF E NO ANALÍTICO.



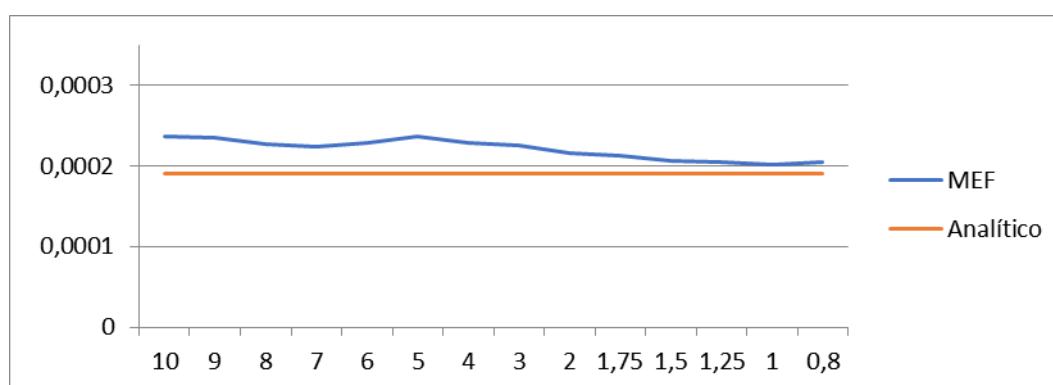
## 5.2 ANÁLISE LINEAR COM SELEÇÃO DE ARESTAS.

Na tabela 2 foi necessário refinar a malha mais vezes, pois a convergência para o resultado com menor diferença percentual para o resultado analítico ficou muito acentuada. A malha foi refinada entre 2mm e 1mm, obtendo assim uma suavização da curva de resultados e uma melhor visualização da convergência percentual. É possível observar essa suavização no resultado computacional no gráfico da Figura 5.

TABELA 2 - DIFERENÇA PERCENTUAL ENTRE O MÉTODO ANALÍTICO E O MEF.

Malha	Resultado pelo MEF	Diferença (%)	CPU (s)	MEMÓRIA (kb)	DISCO (kb)
10	0,000236	23,9	0,01	350	620
9	0,000235	23,4	3,00E-3	1,78E+02	2,26E+02
8	0,000227	19,2	6,00E-3	2,30E+03	3,36E+02
7	0,000223	17,1	3,00E-03	1,68E+02	2,23E+02
6	0,000229	20,2	0,02	421	790
5	0,000237	24,4	2,00E-02	4,65E+02	9,09E+02
4	0,000229	20,2	0,03	564	1,19E+03
3	0,000225	18,1	0,2	1,53E+03	4,40E+03
2	0,000216	13,4	1,00E+00	4,20E+03	1,70E+04
1,5	0,000206	8,2	7,00E+00	1,07E+00	6,54E+04
1,25	0,000204	7,1	2,00E+01	1,78E+04	1,18E+05
1	0,000202	6,1	2,00E+01	2,09E+04	1,38E+05

FIGURA 5 - DIFERENÇA ENTRE OS RESULTADOS OBTIDOS NO MEF E NO ANALÍTICO.



### 5.3 ANÁLISE PARABÓLICA

A análise parabólica, de acordo com os resultados, é a que mais ocupa espaço no computador, com valores em disco que chegam a gigabytes, como visto na tabela 3. Por esse motivo é mais difícil chegar a convergência de resultados parecida com as análises lineares, onde o uso do computador era menor e podiam ser feitas mais análises.

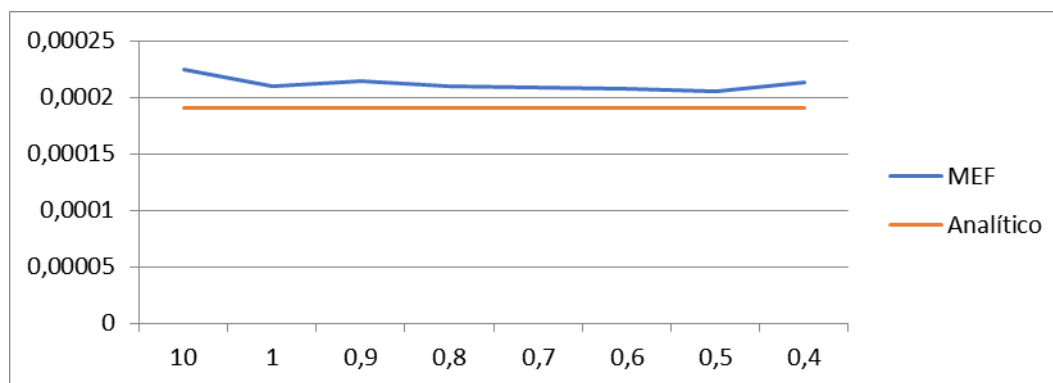


TABELA 3: DADOS RETIRADOS DAS ANÁLISES NO CATIA. DIFERENÇA PERCENTUAL ENTRE O MÉTODO ANALÍTICO E O MEF.

Malha	Resultado pelo MEF	Diferença (%)	CPU (s)	MEMÓRIA (kb)	DISCO (kb)
10	0,000225	18,1	0,09	858	2,56E+03
1	0,00021	10,3	2,00E+03	3,15E+05	3,42E+06
0,9	0,000214	12,4	7,00E+03	7,31E+05	7,56E+06
0,8	0,00021	10,3	1,00E+03	2,61E+05	2,63E+06
0,7	0,000209	9,7	9,00E+03	8,58E+05	1,04E+07
0,6	0,000208	9,2	2,00E+04	1,36E+06	1,63E+07
0,5	0,000205	7,6	9,00E+04	3,97E+06	4,83E+07
0,4	0,000213	11,8	1,00E+05	4,55E+06	5,86E+07

A limitação da máquina usada para fazer a análise parabólica foi um empecilho para a obtenção de um resultado satisfatório, não sendo possível diminuir a malha mais que 0,4mm. No gráfico da Figura 6 observa-se o erro durante a convergência no fim da amostragem, no valor de 0,4mm. Mesmo assim, a menor diferença encontrada foi 7,6%, que representa 0,000176mm.

FIGURA 6 - DIFERENÇA ENTRE OS RESULTADOS OBTIDOS NO MEF E NO ANALÍTICO.



#### 5.4 ANÁLISE PARABÓLICA COM SELEÇÃO DE ARESTAS.

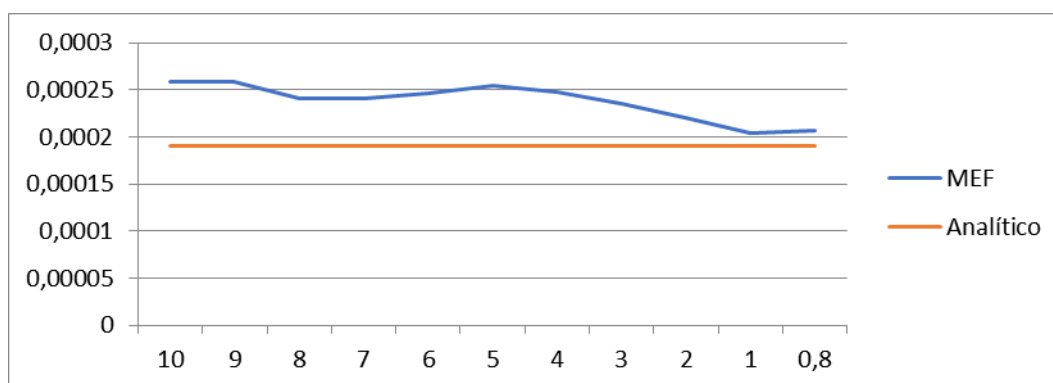
Com a seleção das arestas, o software tem um objetivo mais claro de cálculo a ser feito, é como se ele desse a prioridade para as arestas, onde se encontra mais acúmulo de tensões. Por esse motivo não é necessário chegar a malhas tão pequenas quanto as da análise parabólica para se obter um resultado satisfatório. Os resultados estão mostrados na Tabela 4.

TABELA 4: DADOS RETIRADOS DAS ANÁLISES NO CATIA. DIFERENÇA PERCENTUAL ENTRE O MÉTODO ANALÍTICO E O MEF.

Malha	Resultado pelo MEF	Diferença (%)	CPU (s)	MEMÓRIA (kb)	DISCO (kb)
10	0,000259	36,0	0,8	2,93E+03	1,53E+04
9	0,000259	36,0	2,00E-01	1,36E+03	5,14E+03
8	0,000241	26,5	0,4	1,78E+03	7,83E+03
7	0,000241	26,5	0,2	1,33E+03	5,17E+03
6	0,000246	29,2	2	3,65E+03	2,06E+04
5	0,000255	33,9	1	4,03E+03	2,27E+04
4	0,000247	29,7	2	5,09E+03	2,86E+04
3	0,000236	23,9	2,00E+01	1,47E+04	1,05E+05
2	0,00022	15,5	8,00E+01	4,41E+04	3,85E+05
1	0,000204	7,1	2,00E+03	2,92E+05	3,35E+06
0,8	0,000207	8,7	1,00E+03	2,46E+05	2,57E+06

O gráfico da Figura 7 mostra a diferença para os dois métodos, e a convergência dos valores rumo a um resultado mais próximo do valor analítico.

FIGURA 7 - DIFERENÇA ENTRE OS RESULTADOS OBTIDOS NO MEF E NO ANALÍTICO.



## 6 CONCLUSÃO

Neste artigo foi feita a revisão dos trabalhos sobre método dos elementos finitos, atualizando as informações encontradas em bancos de pesquisa. Também foram colocadas informações sobre tração e sobre o software CATIA. O exemplo mostrado foi submetido a quatro diferentes análises no CATIA: Análise Linear, Análise Linear com seleção de arestas, Análise Parabólica e Análise Parabólica com seleção de arestas.

Os exemplos geraram resultados diferentes levando em conta as modificações feitas em cada um. Os resultados foram contestados uns com os outros, conseguidos pelo mesmo método, para gerar uma credibilidade no resultado final. Através da refinação de malha no CATIA, os resultados foram convergindo progressivamente para um resultado mais próximo do resultado analítico. Desta forma, foi feita uma comparação entre os dois resultados, e observou-se que quanto mais a malha for refinada, mais perto ela chega do resultado analítico e mais confiável é esse resultado, tendo como menor diferença entre os métodos a quantia de 5.7%, que foi conseguida com a Análise Linear com seleção de arestas.

O resultado dessa simulação mostra que há vantagens no uso do software, e novas investigações devem ser feitas, a fim que de uma nova forma de testes possa ser utilizado no mercado. Reforçam-se as vantagens que esse software trás, como custo inferior ao modelo atualmente utilizado para testes, embora os resultados sejam equivalentes.

---

## REFERÊNCIAS

- ASSAN, A. E. **Métodos dos Elementos Finitos: Primeiros Passos**. Campinas: Unicamp, 2003.
- AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.
- RICCI, M. C. **Métodos de Diferenças e Elementos Finitos para Soluções de EDP's**. In: **Seminário de Dinâmica Orbital**, 1, 2005, São José dos Campos.
- SORIANO, H. L. **Elementos Finitos**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.
- SOUZA, R. M. **O Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor**, Notas de aula, Universidade Federal do Pará, Núcleo de instrumentação e computação aplicada à engenharia (NICAE), 2003.
- MELCONIAN, S. **Mecânica Técnica e Resistência dos Materiais**. São Paulo: Érica, 2008.

## ABSTRACT

This work had as main objective to make the computational modeling of one - dimensional bar subjected to the traction and analysis of the results of stretching. The advantage of modeling is that it helps lower operating costs and saves time. For its development, the Finite Element Method was used, and the modeling of the example was performed using CATIA software. The convergence of the results was analyzed by refining the Finite Element meshes that CATIA generates. After convergence, the results were compared to the analytical method using graphs and tables. The result showed proximity, which makes modeling an alternative to testing, at a reduced cost.